2 Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

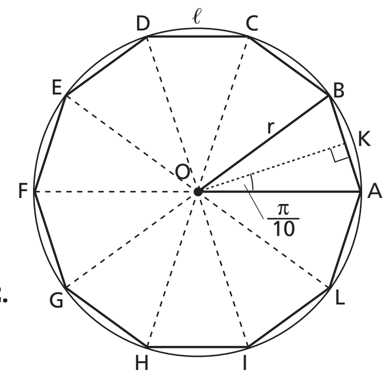
2 Consideriamo il decagono regolare di lato ℓ, inscritto in un cerchio di raggio r e centro O (figura 12).

Poiché per ipotesi il lato ℓ è sezione aurea del raggio r, risulta:

$$r : \ell = \ell : (r - \ell).$$

Applichiamo la proprietà dell'invertire delle proporzioni:

$$\ell : r = (r - \ell) : \ell \rightarrow \frac{\ell}{r} = \frac{r}{\ell} - 1.$$



▶ **Figura 12.**

Posto $\frac{\ell}{r} = a > 0$, vale:

$$a = \frac{1}{a} - 1 \rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \text{accettabile} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \text{non accettabile} \end{cases}$$

Consideriamo il triangolo isoscele ABO e conduciamo l'altezza OK che è anche mediana e bisettrice.

Poiché $A\hat{O}B = \frac{\pi}{5}$, risulta $A\hat{O}K = \frac{\pi}{10}$. Applichiamo il primo teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AO}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{r} = \frac{\ell}{2r} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$