ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

PROBLEMA 2

1. Consideriamo il triangolo isoscele ABC inscritto nella circonferenza C, con $\overline{AC}=\overline{BC}$. Sia $x=A\hat{C}H$, come in figura 9.

Ne segue che $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Per il teorema della corda, $\overline{AB}=2r\mathrm{sen}(2x)$.

Possiamo supporre $\overline{CH}>\overline{CO}$. Infatti, se fosse $H\in CO$ (figura 10), esisterebbe un triangolo isoscele inscritto con base $A'B'=AB$ e altezza $CH'>CH$, quindi di area maggiore. Ne segue che i triangoli isosceli con altezza minore del raggio non sono di area massima.

Ora, poiché $\overline{OC}=\overline{OA}=r$, si ha che $A\hat{C}O=C\hat{A}O=x$, quindi $A\hat{O}H=2x$. Ne segue che $\overline{OH}=r\cos(2x)$, perciò $\overline{CH}=r+r\cos(2x)$. La funzione che descrive l'area del triangolo ABC è, perciò,

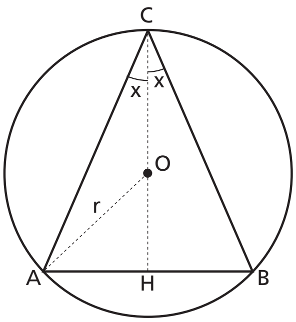
$$f(x)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2}=r\mathrm{sen}(2x)\cdot[r+r\cos(2x)]=$$

$$=r^2[\mathrm{sen}(2x)+\cos(2x)\mathrm{sen}(2x)].$$

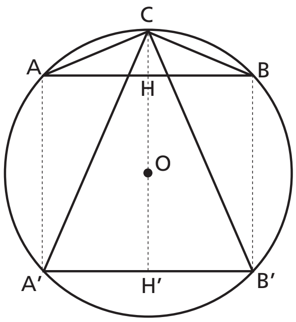
Studiamone la derivata nell'intervallo $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x)=r^2[2\cos(2x)-2\,\mathrm{sen}^2(2x)+2\cos^2(2x)]=$$

$$=2r^2[2\cos^2(2x)+\cos(2x)-1].$$



▲ **Figura 9.**



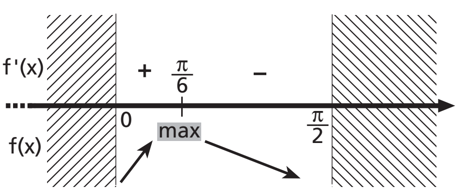
▲ **Figura 10.**

Essa è non negativa se $\cos(2x)\leq-1$ oppure $\cos(2x)\geq\frac{1}{2}$. La prima disequazione è impossibile nel dominio, mentre la seconda è verificata per $0<2x\leq\frac{\pi}{3}$, cioè per $0<x\leq\frac{\pi}{6}$.

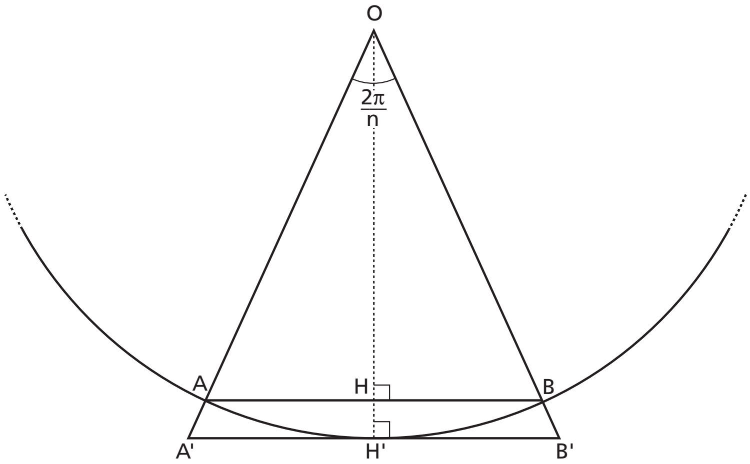
Riportiamo l'andamento nella figura 11.

L'area massima si ottiene, quindi, per $x=\frac{\pi}{6}$, che corrisponde a un triangolo equilatero.

▼ **Figura 11.**



2. Un poligono regolare di n lati inscritto si può scomporre in n triangoli isosceli congruenti con vertice in comune nel centro del cerchio. Essi hanno angolo al vertice di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ e lato r. Sia ABO un triangolo siffatto, come in figura 12.



◀ **Figura 12.**

Per il teorema della corda si ha che $AB = 2r\text{sen}\frac{\pi}{n}$. Per il teorema di Pitagora si ha:

$$OH = \sqrt{r^2 - r^2\text{sen}^2\frac{\pi}{n}} = r\text{sen}\frac{\pi}{n}.$$

L'area del poligono inscritto cercata è quindi:

$$S_n = n \cdot A_{AOB} = n \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OH}}{2} = nr^2\text{sen}\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2}r^2\text{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Analogamente, per il poligono regolare di n lati circoscritto, consideriamo il triangolo $OA'B'$ della precedente figura. Tale triangolo ha r come altezza e angolo al vertice $\frac{2\pi}{n}$. Ne segue che $\overline{H'B'} = r\text{tg}\frac{\pi}{n}$ e, quindi, l'area del poligono vale:

$$A_n = n \cdot A_{AO'B'} = n \cdot r^2\text{tg}\frac{\pi}{n}.$$

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}r^2\text{sen}\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \frac{\text{sen}\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$. Nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambio di variabile $t = \frac{2\pi}{n}$ e si è ricordato che $\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}\, t}{t} = 1$.

4. Il problema della quadratura del cerchio consiste nel costruire un quadrato di area pari a quella di un cerchio di raggio assegnato con riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi r^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee equivalenti all'uso di riga e compasso.