

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva**

■ **PROBLEMA 2**

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB . Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

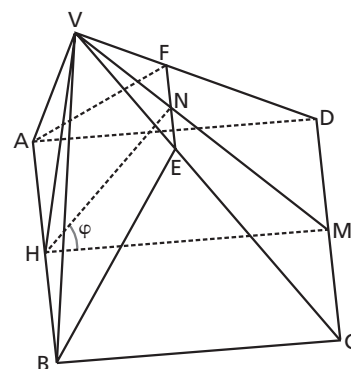
- a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrittibile in una circonferenza γ .
- b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?
- c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α .
- d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy) , determinare l'equazione della circonferenza γ .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 2

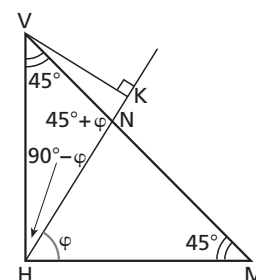
- a) Costruiamo la piramide e conduciamo per la retta AB il piano α . La retta CD non interseca il piano α e quindi nemmeno la retta EF (intersezione di α col piano della faccia CDV), perciò $CD \parallel EF$. Per ipotesi $CD \parallel AB$, quindi la corda EF è parallela anche ad AB : pertanto il quadrangolo convesso $ABEF$ è un trapezio.

Per ipotesi la faccia AVB è un triangolo isoscele (l'altezza VH è mediana della base AB), quindi $VA \cong VB$. Per il primo criterio di congruenza le facce ADV e BCV sono triangoli rettangoli congruenti ($AD \cong BC$ per ipotesi, $VA \cong VB$, $DA \perp VA$, $BC \perp VB$ per il teorema delle tre perpendicolari) e anche la faccia CDV è un triangolo isoscele. Poiché EF è parallela a CD allora $VE \cong VF$, quindi, per il primo criterio di congruenza, il triangolo AFV è congruente al triangolo BEV , da cui $AF \cong BE$. Il trapezio $ABEF$ è dunque isoscele e quindi inscrittibile in una circonferenza (un quadrangolo convesso con angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza).



▲ Figura 5.

- b) Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che siano uguali le somme delle coppie di lati opposti. Nel nostro caso dobbiamo verificare se $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$. Per determinare EF si osserva che i triangoli VEF e VDC sono simili; una volta determinato il rapporto di similitudine $\frac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ si può calcolare anche \overline{EF} . Studiamo quindi il triangolo VHM , riportato per comodità in figura 6: è un triangolo rettangolo isoscele, quindi $\widehat{HVM} = \widehat{HMV} = 45^\circ$. Si ha poi $\widehat{VHN} = 90^\circ - \varphi$ e $\widehat{VNH} = 45^\circ + \varphi$.



▲ Figura 6.

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo VHN :

$$\frac{\overline{VN}}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\overline{VH}}{\sin(45^\circ - \varphi)}$$

da cui si ricava:

$$\overline{VN} = \frac{7 \cos \varphi}{\sin 45^\circ \cos \varphi + \cos 45^\circ \sin \varphi}.$$

Poiché per ipotesi $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, si ha $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, quindi:

$$\overline{VN} = \frac{7 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{21}{7 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Essendo $\overline{VM} = 7\sqrt{2}$, il rapporto di similitudine $\frac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ è allora $\frac{3}{7}$, pertanto $\overline{EF} = \frac{3}{7} \overline{CD} = 3$ cm.

Calcoliamo infine \overline{NH} mediante il teorema di Carnot:

$$NH = \sqrt{\overline{VN}^2 + \overline{VH}^2 - 2\overline{VN} \cdot \overline{VH} \cdot \cos \widehat{V}} = 5 \text{ cm.}$$

Affinché la relazione $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$ sia vera, dovrebbe essere $\overline{AF} = \frac{\overline{AB} + \overline{EF}}{2} = 5$ cm. Ma, ricordando che \overline{AF} è un lato obliquo del trapezio isoscele $ABEF$ e che l'altezza del trapezio è $\overline{NH} = 5$ cm, deve essere $\overline{AF} > 5$ cm, quindi la relazione $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$ è falsa e il trapezio $ABEF$ non è circoscrivibile a una circonferenza.

- c) La parte superiore è la piramide $ABEFV$ di base il trapezio isoscele $ABEF$ la cui altezza \overline{VK} , come si vede in figura 6, si ottiene proiettando il vertice V sul piano α , in particolare sulla retta per \overline{NH} :

$$\overline{VK} = \overline{VH} \cdot \sin(90^\circ - \varphi) = 7 \cos \varphi = \frac{21}{5} \text{ cm. Quindi il volume della piramide } ABEFV \text{ è:}$$

$$V_{(ABEFV)} = \frac{1}{3} A_{(ABEF)} \cdot \overline{VK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{EF}) \cdot \overline{HN} \cdot \frac{21}{5} \text{ cm} = 35 \text{ cm}^3.$$

Il volume della parte inferiore della piramide $ABCDV$ si ottiene per differenza:

$$V_{(ABCDV)} = V_{(ABCDV)} - V_{(ABEFV)} = \frac{1}{3} A_{(ABCD)} \cdot \overline{VH} - 35 \text{ cm}^3 = \frac{343}{3} \text{ cm}^3 - 35 \text{ cm}^3 = \frac{238}{3} \text{ cm}^3.$$

- d) Scegliamo un sistema di riferimento di centro $O(0,0) \equiv H$, avente come asse x la retta per AB orientata da A verso B e come asse y la retta per \overline{HN} orientata da H verso N come illustrato in figura 7.

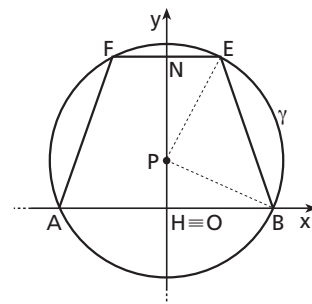
Cerchiamo l'equazione della circonferenza γ passante per i punti $A\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $E\left(\frac{3}{2}, 5\right)$, $F\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$, simmetrica rispetto all'asse y e che quindi ha centro $P(0, k)$. L'equazione della circonferenza rispetto al sistema di riferimento scelto è quindi $x^2 + (y - k)^2 = r^2$. Determiniamo k ed r .

Il centro $P(0, k)$ deve essere equidistante da B ed E :

$$\overline{PE}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} + (5 - k)^2 = \frac{49}{4} + k^2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Quindi il centro ha coordinate $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $r^2 = \overline{PE}^2 = \frac{58}{4}$.

L'equazione di γ rispetto al sistema di riferimento scelto è $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{58}{4}$, che dopo alcuni calcoli diventa: $x^2 + y^2 - 3y - \frac{49}{4} = 0$.



▲ Figura 7.