

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007**

■ **PROBLEMA 2**

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $\hat{C}AB$ si mantenga doppio dell'angolo $\hat{A}BC$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C .
2. Si rappresenti γ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\hat{A}BC$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\hat{A}BC = 36^\circ$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

PROBLEMA 2

1. Consideriamo il sistema di riferimento Oxy centrato in A e con gli assi cartesiani orientati come in figura 2.

Indichiamo con $(x; y)$ le generiche coordinate di C e con α l'angolo \widehat{ABC} . Ne segue che $\widehat{CAB} = 2\alpha$. Osserviamo che il punto C deve giacere nel semipiano $x < \frac{1}{2}$ altrimenti l'angolo \widehat{BAC} sarebbe minore o uguale ad \widehat{ABC} .

Tale condizione può essere migliorata, osservando che nel primo quadrante è possibile costruire all'interno del triangolo ABC il triangolo isoscele $AA'C$ (poiché $x < \frac{1}{2}$) di altezza CD , come in figura 3.

L'angolo $\widehat{BCA'}$ è uguale ad α in quanto l'angolo supplementare di $\widehat{CA'B}$ è uguale a 2α .

Quindi $\overline{CA'} = \overline{A'B} = 1 - 2x$.

Inoltre, essendo CA' l'ipotenusa del triangolo rettangolo $A'CD$ con cateto $\overline{DA'} = x$, deve essere $1 - 2x \geq x$, cioè $x \leq \frac{1}{3}$.

Poiché il problema presenta una simmetria rispetto all'asse x , limitiamoci a considerare il caso $y \geq 0$. Per trovare l'equazione del luogo geometrico possiamo procedere in due modi.

Primo metodo

Considerando i triangoli rettangoli ottenuti tracciando l'altezza relativa alla base AB , risulta:

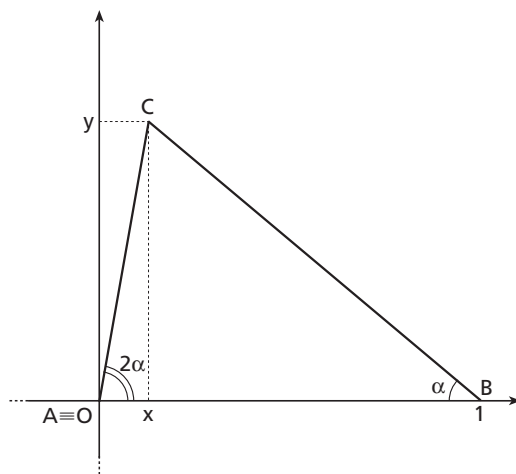
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1-x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia $x \neq 0$.

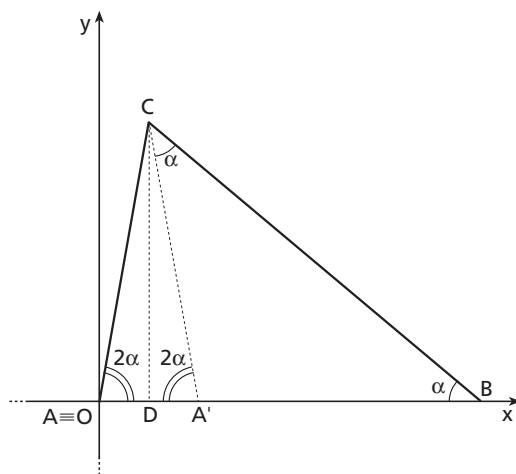
Il caso $x = 0$ è, comunque, geometricamente accettabile in quanto si otterrebbe il triangolo rettangolo in A e isoscele, con C di coordinate $(0; 1)$.

Supponiamo, allora, $x \neq 0$ (e quindi $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$). Dal sistema, ricordando la formula di duplicazione della tangente, otteniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1-x} \\ \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \frac{2 \left(\frac{y}{1-x} \right)}{1 - \left(\frac{y}{1-x} \right)^2} = \frac{y}{x}$$



▲ Figura 2.



▲ Figura 3.

Svolgendo i calcoli e portando il tutto a forma normale otteniamo

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

Questa equazione comprende anche il caso $x=0$, poiché la curva passa per il punto $(0; 1)$, e i casi simmetrici. Questi ultimi corrispondono a valori negativi di y .

Essa rappresenta, dunque, l'equazione del luogo geometrico richiesto, considerando però la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$.

Secondo metodo

Osserviamo che la figura 3 rappresenta il caso in cui $x \geq 0$.

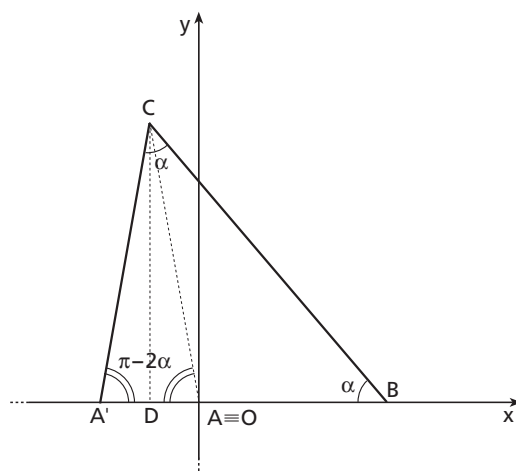
Il caso in cui, invece, si ha $x < 0$ è rappresentato in figura 4. In questo caso è possibile costruire un triangolo isoscele $A'AC$, esterno al triangolo ABC , di altezza CD . L'angolo $\widehat{CA'A}$ è uguale a $\pi - 2\alpha$, in quanto l'angolo supplementare \widehat{CAB} è uguale a 2α . Ne segue che anche il triangolo $A'BC$ è isoscele, in quanto $\widehat{A'CB} = \widehat{A'BC} = \alpha$.

Consideriamo il triangolo rettangolo CDA , in cui $CD = y$; vale inoltre che $AD = -x$ e $AC = A'B = 1 - 2x$.

In entrambi i casi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo CDA' , otteniamo che

$$x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$$

che è l'equazione del luogo cercato.



▲ Figura 4.

2. Riscrivendo, con il metodo del completamento dei quadrati, l'equazione nella forma

$$9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$$

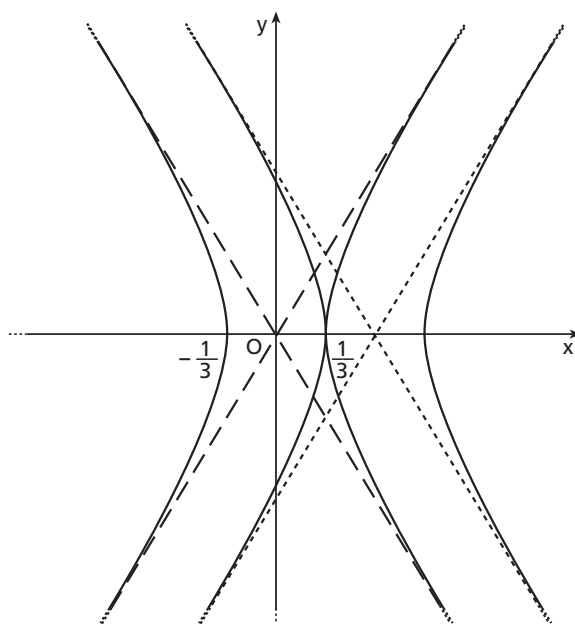
è facile riconoscere che tale curva è l'iperbole che si ottiene dalla traslazione rispetto al vettore

$\vec{v}\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

che ha vertici in $\left(\pm \frac{1}{3}; 0\right)$ e asintoti $y = \pm \sqrt{3}x$ (figura 5).

Tenendo conto delle limitazioni geometriche, γ è il ramo sinistro di tale iperbole traslata.



▲ Figura 5.

3. Siano H e K i piedi delle altezze relative ai lati CB e AC , ne segue che $AH = \sin \alpha$ e $BK = \sin(2\alpha)$.

Inoltre, vale $\alpha < \frac{\pi}{3}$ perché $\alpha + 2\alpha < \pi$ (in quanto due angoli interni di uno stesso triangolo).

Supponiamo, quindi, $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ e cerchiamo il massimo in tale dominio della funzione $f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \sin^2(2\alpha)$. Per farlo calcoliamo la derivata prima della funzione $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) = \\ &= \sin(2\alpha) + 4 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) = \\ &= \sin(2\alpha)[1 + 4 \cos(2\alpha)]; \end{aligned}$$

$\sin(2\alpha)$ è sempre positivo in $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$, quindi $f'(\alpha) \geq 0$ se $1 + 4 \cos(2\alpha) \geq 0$.

$$1 + 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) \geq 0 \rightarrow \sin^2 \alpha \leq \frac{5}{8} \rightarrow 0 < \alpha \leq \arcsen \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Riportiamo l'andamento della funzione in figura 7.

Quindi l'ampiezza dell'angolo $\hat{A}BC$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze AH e BK è

$$\hat{A}BC = \arcsen \sqrt{\frac{5}{8}} \approx 52^\circ 14'.$$

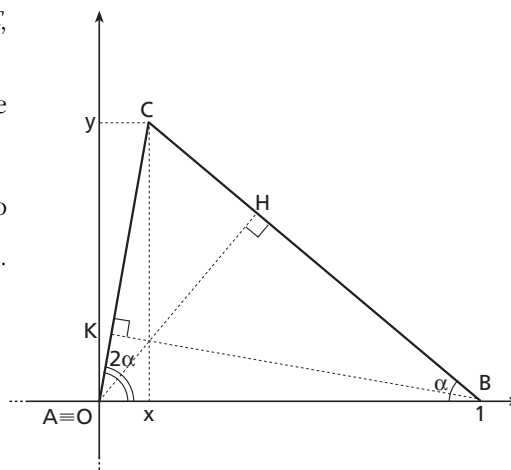
4. Per $\alpha = 36^\circ$ si ottiene un triangolo isoscele ABC di angoli $\hat{C}AB = \hat{A}CB = 72^\circ$ e lati $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Tracciando la bisettrice dell'angolo $\hat{C}AB$ che interseca il lato BC nel punto M si ottiene il triangolo ACM simile al triangolo ABC poiché equiangoli, come mostrato in figura 8. Se chiamiamo $\overline{AC} = x$ risulta $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = x$ e $\overline{CM} = 1 - x$.

Per similitudine otteniamo:

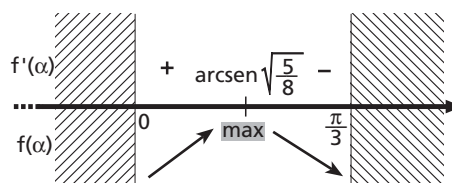
$$\overline{CM} : \overline{CA} = \overline{CA} : 1, \text{ cioè } 1 - x : x = x : 1,$$

$$\text{e quindi } x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 = 0,$$

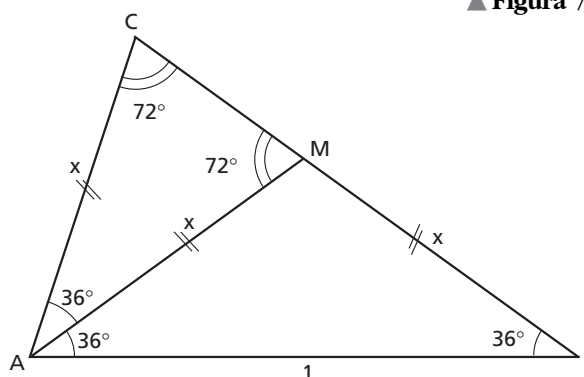
$$\text{la cui soluzione positiva è } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$



▲ Figura 6.



▲ Figura 7.



▲ Figura 8.