

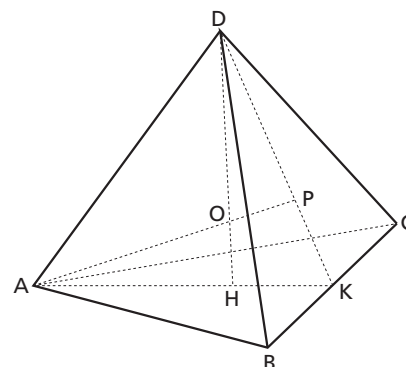
■ **PROBLEMA 1**

Si consideri un tetraedro regolare  $T$  di vertici  $A, B, C, D$ .

- Indicati rispettivamente con  $V$  ed  $S$  il volume e l'area totale di  $T$  e con  $r$  il raggio della sfera inscritta in  $T$ , trovare una relazione che legghi  $V$ ,  $S$  ed  $r$ .
- Considerato il tetraedro regolare  $T'$  avente per vertici i centri delle facce di  $T$ , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di  $T$  e  $T'$  e il rapporto fra i volumi di  $T$  e  $T'$ .
- Condotto il piano  $\alpha$ , contenente la retta  $AB$  e perpendicolare alla retta  $CD$  nel punto  $E$ , e posto che uno spigolo di  $T$  sia lungo  $s$ , calcolare la distanza di  $E$  dalla retta  $AB$ .
- Considerata nel piano  $\alpha$  la parabola  $p$  avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A, B$  ed  $E$ , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di  $p$ .
- Determinare per quale valore di  $s$  la regione piana delimitata dalla parabola  $p$  e dalla retta  $EA$  ha area  $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$ .

**PROBLEMA 1**

- a) Detto  $s$  lo spigolo del tetraedro  $T$ , si ha che  $AK$  e  $DK$  sono le altezze di due facce di  $T$  (figura 1) e misurano  $s \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Le altezze  $AK$  e  $DK$  sono anche bisettrici e mediane. L'altezza  $DH$  cade nel baricentro del triangolo  $ABC$ , quindi  $\overline{HK} = \frac{1}{3} \overline{AK} = s \frac{\sqrt{3}}{6}$ . L'altezza  $DH$  si può calcolare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo  $DHK$  (figura 2): risulta  $\overline{DH} = s \sqrt{\frac{2}{3}}$ .



► **Figura 1.**

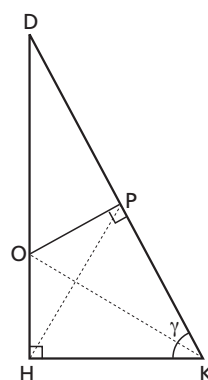
Le altezze del tetraedro si incontrano nel punto  $O$ , centro della sfera inscritta in  $T$ , che ha raggio  $OH = OP = r$ .

I triangoli rettangoli  $KOH$  e  $KOP$  sono congruenti, allora  $KO$  è la bisettrice di  $\widehat{HKP} = \gamma$ . Considerando il triangolo  $OHK$ , si può scrivere:  $r = \overline{HK} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = s \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ , ma  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{DH}}{\overline{HK}} = 2\sqrt{2}$ , da cui, attraverso le formule di bisezione si giunge a:  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . In definitiva risulta:  $r = \frac{s}{2\sqrt{6}}$ .

La superficie del tetraedro è:  $S = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s \right) = s^2 \sqrt{3} = r^2 \cdot 24\sqrt{3}$ .

Il volume risulta:  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \cdot s \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = r^3 \cdot 8\sqrt{3}$ , da cui segue:  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$ .

▲ **Figura 2.**

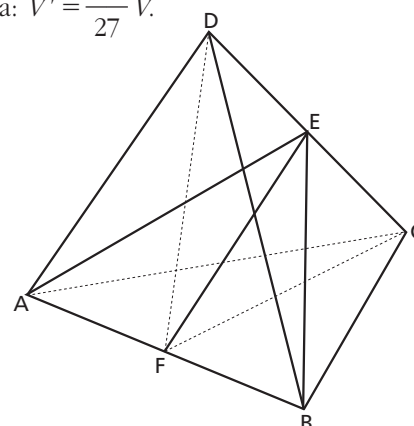


- b)  $HP$  è uno spigolo del tetraedro  $T'$ , con riferimento al triangolo  $HPK$ , nel quale si nota che  $\widehat{KHP} = \widehat{KPH} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ , si ha:  $\frac{\overline{HP}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{HK}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \overline{HP} = 2 \cdot \overline{HK} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ . Dal valore di  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  si ricava  $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Allora  $s' = \overline{HP} = 2 \cdot s \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s}{3}$ , da cui si ha:  $V' = \frac{1}{27} V$ .

- c) Con riferimento alla figura 3, detto  $F$  il punto medio di  $AB$ , allora  $DF$  e  $CF$  sono le mediane delle facce  $ADB$  e  $ACB$  rispettivamente, il triangolo  $DFC$  è quindi isoscele e l'altezza  $EF$  è anche mediana: il piano  $\alpha$  interseca  $CD$  nel punto medio  $E$ .  $AE$  è la mediana della faccia  $CAD$ ,  $BE$  è la mediana della faccia  $CBD$ , quindi  $ABE$  è isoscele e la mediana  $EF$  è anche altezza. Dal teorema di Pitagora per  $AEF$ :

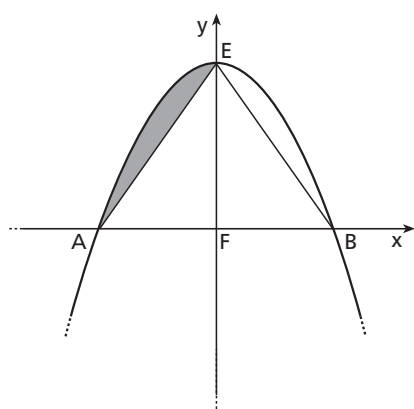
$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{\left( s \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left( \frac{s}{2} \right)^2} = s \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

► **Figura 3.**



- d) Scelto il sistema di riferimento con origine nel punto  $F$ , asse delle ascisse coincidente con la retta orientata  $AB$ , asse delle ordinate coincidente con la retta orientata  $FE$  (figura 4), si scrive l'equazione della parabola  $y = ax^2 + bx + c$ , passante per i punti  $A\left(-\frac{s}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(\frac{s}{2}; 0\right)$ ,  $E\left(0; s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

$$\text{Risulta: } \begin{cases} 0 = a \cdot \left(-\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{s}{2}\right) + c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + c \\ s\frac{\sqrt{2}}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \\ b = 0 \\ c = s\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



◀ Figura 4.

- e) L'area del segmento parabolico  $ABE$  è  $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$ , l'area del triangolo  $ABE$  risulta  $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$ .

L'area delimitata dalla parabola e dalla retta  $EA$  è quindi:  $A = \frac{1}{2} \cdot (A_1 - A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} s\right) = \frac{s^2 \sqrt{2}}{24}$ , che risulta pari a  $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$  quando  $s = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ .