

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 2**

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1] \quad a + 2x, a - x, 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

- a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenero.
- b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.
- c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
- d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

a) Tenendo conto che x e a , in quanto lunghezze, sono non negative, le condizioni che devono essere soddisfatte sono la positività delle lunghezze dei lati e le disuguaglianze triangolari:

$$\begin{cases} a+2x > 0 \\ a-x > 0 \\ 2a-x > 0 \\ a+2x < a-x+2a-x \\ a-x < a+2x+2a-x \\ 2a-x < a+2x+a-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2x > 0 \text{ sempre verificato} \\ x < a \\ x < 2a \\ x < \frac{a}{2} \\ 2x+2a > 0 \text{ sempre verificato} \\ 2x > 0 \text{ sempre verificato} \end{cases} \rightarrow x < \frac{a}{2}.$$

Per avere un triangolo non degenerare deve essere $0 < x < \frac{a}{2}$.

b) Per calcolare l'area del triangolo, noti i lati, si usa la formula di Erone:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ove p è il semiperimetro.

$$p = 2a \rightarrow S(x) = \sqrt{2a(a-2x)(a+x)x} = \sqrt{2a} \sqrt{-2x^3 - ax^2 + a^2x}.$$

La funzione S è continua nell'intervallo $\left]0; \frac{a}{2}\right]$; la sua derivata

prima è $S'(x) = \sqrt{2a} \frac{-6x^2 - 2ax + a^2}{2\sqrt{-2x^3 - ax^2 + a^2x}}$. Studiando il suo

segno si ricava che $S'(x) > 0$ quando $-6x^2 - 2ax + a^2 > 0$, che

ha soluzione $0 < x < a \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}$. Lo schema che si ottiene è il seguente (figura 2).

Pertanto il triangolo non degenerare ha area massima per $x = a \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}$. Si osservi che per $x = 0$ e

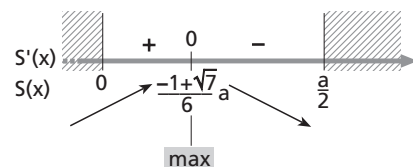
$x = \frac{a}{2}$ la superficie assumerebbe il valore minimo zero ma questi casi corrispondono a triangoli degeneri.

c) Nel punto a) si è trovato che le lunghezze sono lati di un triangolo non degenerare quando $0 < x < \frac{a}{2}$,

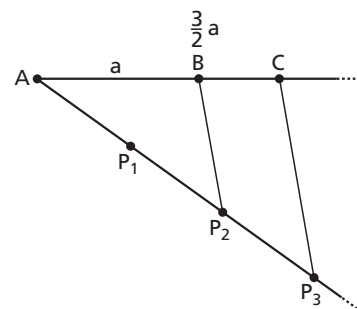
allora ciò è vero per $x = \frac{a}{4}$. In tal caso i lati hanno lunghezze $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{4}a$ e $\frac{7}{4}a$, tutti e tre multipli di a secondo numeri razionali. Dato un segmento che assumiamo di lunghezza a , si costruisce il segmento di lunghezza $\frac{m}{n}a$, per esempio, $\frac{3}{2}a$, nel seguente modo (figura 3).

Tracciato il segmento AB che misura a , si disegna da A una semiretta non contenente B . Su essa si sceglie un generico punto P_1 e col compasso si riporta per tre volte (il massimo tra m e n nel caso generale) il segmento AP_1 . Congiunto B con P_2 , si manda da P_3 la parallela a BP_2 . Il segmento AC per il teorema di Talete ha lunghezza $\frac{3}{2}a$.

Allo stesso modo si ottengono i segmenti di lunghezza $\frac{3}{4}a$ e $\frac{7}{4}a$. La costruzione del triangolo ABC avviene nel piano con



▲ Figura 2.



▲ Figura 3.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

l'uso del compasso. Partendo, per esempio, dal segmento più lungo BC (figura 4), si riporta puntando il compasso prima in un estremo poi nell'altro rispettivamente i restanti segmenti trovati. L'intersezione dei due archi individua il punto A . Si valuta il tipo di triangolo applicando il teorema trigonometrico di Carnot:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha.$$

Ricavando $\cos \alpha$ e sostituendo le lunghezze dei lati, si trova $\cos \alpha = -\frac{1}{9}$. Pertanto il triangolo è ottusangolo.

- d)** Compiuta la costruzione, si tracci da A la perpendicolare a BC e si consideri il triangolo rettangolo HAD (figura 5). L'angolo da valutare è $D\hat{H}A$.

Dai teoremi sui triangoli rettangoli si può scrivere:

$$\operatorname{tg} D\hat{H}A = \frac{\overline{DA}}{\overline{HA}}. \quad \overline{DA} = a \text{ per ipotesi, } HA \text{ è l'altezza del triangolo}$$

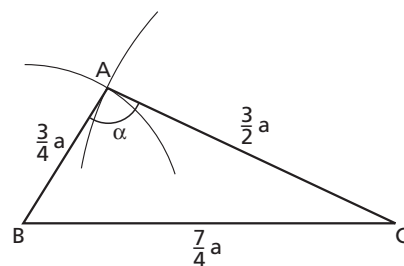
ABC rispetto alla base BC . Pertanto se S è l'area del triangolo

$$ABC, \overline{HA} = \frac{2S}{\overline{BC}}. \text{ Dal punto b) del problema si ricava:}$$

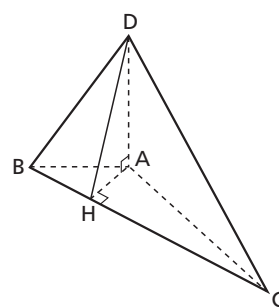
$$S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \sqrt{2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{5a}{4} \cdot \frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4} a^2.$$

$$\text{Quindi: } \overline{HA} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{4} a^2}{\frac{7}{4} a} = \frac{2\sqrt{5}}{7} a \text{ e } \operatorname{tg} D\hat{H}A = \frac{7}{10} \sqrt{5}, \text{ da cui } D\hat{H}A = \operatorname{arctg} \frac{7}{10} \sqrt{5}. \text{ Utilizzando la}$$

calcolatrice scientifica si trova: $D\hat{H}A \approx 57,4^\circ$.



▲ Figura 4.



▲ Figura 5.